Mircea Fianu
Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VIII-a

II

art
educațional

Cuprins

Algebră

I. Funcții

II. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații

Geometrie

III. Poliedre

IV. Corpuri rotunde

Sinteze

V. Subiecte pentru evaluările finale

Soluții

I.1. Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A şi B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulțimea A se numeşte *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numeşte *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numeşte *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numeşte *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției f* în punctul x.

Imaginea funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. *Imaginea* (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea: $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\operatorname{Im} f \subset B$.

Putem scrie şi astfel: $\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Graficul funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte *graficul funcției f*. Avem şi $G_f = \{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcția numerică este o funcție ale *cărei domeniu de definiție şi domeniu de valori sunt submulțimi ale lui* $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

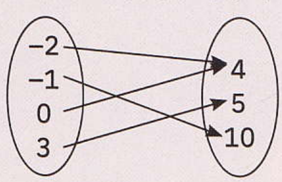
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x,y) \in G$, îi putem asocia un punct $M(x,y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x,y)$, cu $(x,y) \in G$ se numeşte *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

Funcții egale. Două funcții $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1 Printr-o ***diagramă***.

$f : \{-2; -1; 0; 3\} \to \{4; 5; 10\}$,



2 Printr-un ***tabel***.

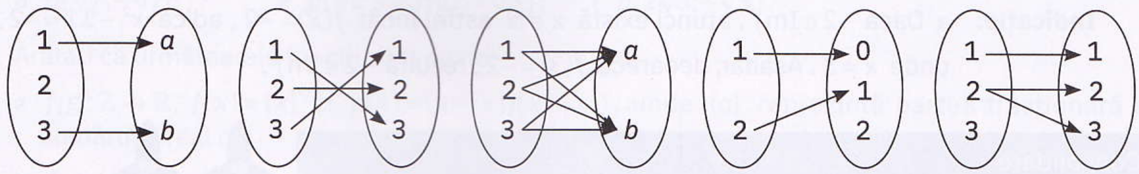
$g : \{-1; 0; 2; 5\} \to \{1; 2; 3\}$.

x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3 Prin una sau mai multe formule analitice:

$h : \{0,2,4\} \to \{0,4,16\}, h(x) = x^2$; $\quad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} 3x - 5, \text{ dacă } x \le 1 \\ 2x + 3, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$.

1 Precizați care dintre următoarele diagrame definesc funcții:



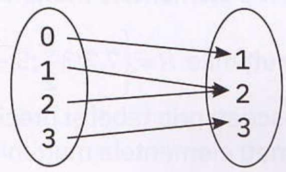
a b c d e

2 Explicați de ce tabelul alăturat **nu** descrie o funcție.

x	-1	0	1	2	1
$f(x)$	0	3	4	5	6

3 Precizați dacă scrierea $f:\{-1;0;1;2\}\to\{0;1;2;3;4\}$, $f(x)=x+1$, reprezintă o funcție.

4 În imaginea alăturată este descrisă funcția $f:A\to B$.



a Precizați elementele mulțimilor A şi B.
b Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$.
c Scrieți elementele mulțimii G_f.

5 Tabloul alăturat descrie o funcție $f:A\to B$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	4	8	12

a Determinați mulțimea A.
b Scrieți mulțimea $\operatorname{Im} f$.
c Descrieți corespondența $x\to f(x)$ printr-o formulă.

6 Explicați dacă mulțimea indicată reprezintă graficul unei funcții definite pe mulțimea $\{-2;-1;0;1;2\}$ cu valori în $\mathbb{R}$. În caz afirmativ, descrieți funcția printr-o diagramă.
a $G_f=\{(-2;0);(-1;0);(0;1);(1;1);(2;2)\}$;
b $G_g=\{(-2;-1);(-2;0);(-1;-1);(0;-1);(1;2)\}$;
c $G_h=\{(-2;1);(-1;-1);(0;-1);(1;1);(1;2);(2;1)\}$.

7 a Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $S=\{f;b\}$.
b Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $\mathbb{N}$.

Indicație: $f:E\to\mathbb{N}$, $f(e)=$ numărul curent din catalog al elevului e.

8 Descrieți trei funcții definite pe mulțimea $N=\{23;157;4;2000;145\}$ cu valori în mulțimea $C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

Indicație: Ultima cifră a numărului 23 este 3. Definim $u(23)=3$.

9 Descrieți trei funcții s definite pe mulțimea $N=\{157;59;1002;8\}$ cu valori în mulțimea $S=\{3;4;8;9;13;14\}$.

Indicație: Suma cifrelor numărului 157 este egală cu 13. Definim $s(157)=13$.

10 Descrieți, în mod natural, o funcție f definită pe mulțimea $F=\left\{\frac{15}{24};\frac{34}{51};\frac{108}{56};\frac{225}{125}\right\}$ cu valori în mulțimea $I=\left\{\frac{9}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{8};\frac{27}{14}\right\}$.

Indicație: $\frac{^{(3}15}{24}=\frac{5}{8}$.

11 Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2 \in \operatorname{Im} f$:
a $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(x)=x^2-11$; **b** $f:\{-2,-1,0,1\} \to \mathbb{R}, f(x)=2x+3$.
c $f:[-3;2) \to \mathbb{R}, f(x)=4x-3$; **d** $f:\left(-\frac{5}{4},+\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x)=4x+3$.

Indicație: **a** Dacă $-2 \in \operatorname{Im} f$, atunci există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=-2$, adică $x^2-11=-2$, de unde $x=3$. Așadar, deoarece $f(3)=-2$, rezultă $-2 \in \operatorname{Im} f$.

Consolidare

12 Fie mulțimile $R=\left\{3{,}14;\frac{7}{3};4;-1;-2\frac{1}{10};\sqrt{10}\right\}$ și $I=\{-3;-1;1;2;3;4\}$.
a Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $i:R \to I$, $i(x)=[x]$.
b Scrieți elementele mulțimii G_i.

13 Fie mulțimile $R=\left\{7{,}2;3\frac{1}{2};5;-1{,}4;-\frac{1}{3}\right\}$ și $F=\{0;0{,}2;0{,}5;0{,}6;0{,}(6)\}$.
a Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $z:R \to F$, $z(x)=\{x\}$.
b Scrieți elementele mulțimii G_z.

14 Se consideră mulțimile $M=\{28;55;27;39\}$ și $N=\{9;17;13;4;5\}$. Verificați dacă asocierea: „oricare $x \in M$, $x \to y = f(x) \in N$, unde $f(x)$ este divizor al lui x", reprezintă o funcție definită pe mulțimea M cu valori în mulțimea N.

15 Se consideră mulțimile $A=\left\{-2;\frac{7}{5};-\pi;0;\sqrt{3}\right\}$ și $S=\{-1;0;1\}$.
a Descrieți printr-un tabel funcția $\sigma:A \to S$, $\sigma(x)=\begin{cases}-1, \text{pentru } x<0\\ 0, \text{pentru } x=0\\ 1, \text{pentru } x>0\end{cases}$.
b Precizați imaginea funcției σ și scrieți elementele mulțimii G_σ.

16 Se consideră mulțimile $A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ și $M=\{0;1;2;3\}$.
a Descrieți prin tabel și precizați imaginea funcției $m:A \to M$, $m(x)=|x|$.
b Scrieți elementele mulțimii G_m.
c Reprezentați geometric mulțimea G_m.

17 Se consideră mulțimea $A=\left\{0;1;\frac{4}{9};1\frac{9}{25};10{,}24;11\right\}$ și funcția $r:A \to \mathbb{R}$, $r(x)=\sqrt{x}$.
a Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} r$ și efectuați $\mathbb{Q} \cap \operatorname{Im} r$.
b Descrieți printr-o formulă o funcție $p:\operatorname{Im} r \to A$.

18 Se consideră mulțimea $U=\{30°,45°,60°\}$. Determinați imaginile funcțiilor:
a $s:U \to \mathbb{R}$, $s(x)=\sin x$; **b** $t:U \to \mathbb{R}$, $t(x)=\operatorname{tg} x$.

19 Fie $I=\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*, (a;b)=1\right\}$ și funcția $f:I \to \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=x+y$.
a Determinați imaginea mulțimii $A=\left\{\frac{1}{9};\frac{99}{1};\frac{153}{152}\right\}$.
b Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n>1$, există $t \in I$ astfel încât $f(t)=n$.

20 Se consideră funcția $s:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x;y)=x+y$. Calculați:
a $s(0;-3)$; **b** $s(3;-3)$; **c** $s(-8;-7)$;
d $s\left(0{,}5;\frac{-3}{2}\right)$; **e** $s\left(1-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$; **f** $s\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

21 Se consideră funcția $p:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x;y)=x\cdot y$. Calculați:

a $p(7;-1)$; **b** $p(-2;-2)$; **c** $p\left(1\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$;

d $p\left(\sqrt{7};-\sqrt{28}\right)$; **e** $p\left(\sqrt{2}-\sqrt{3};\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; **f** $p\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

22 Arătați că următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$ şi $g(x)=(x-|x|)(x+|x|)$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a;

b $f,g:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ şi $g(x)=\dfrac{|x|-x}{2x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

c $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|1-x|+|1+x|$ şi $g(x)=\max(2,x+1)$;

d $f,g:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2-x|-|2+x|$ şi $g(x)=\min(-2x,4)$.

e $f,g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(x,x^2)$ şi $g(x)=\max(x^2,x^3)$.

f $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2|x|$ şi $g(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\sqrt{(x^2+1)^2}$;

23 Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a numărului natural x.

a Determinați mulțimea $\operatorname{Im} f$.

b Calculați suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(105)$.

24 Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=$ ultima cifră a numărului natural 2^n.

a Determinați mulțimea $\operatorname{Im} f$.

b Calculați suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2012)$.

25 **a** Descrieți trei funcții definite pe mulțimea T a triunghiurilor din planul α cu valori în mulțimea C a cercurilor din planul α.

b Descrieți trei funcții definite pe mulțimea triunghiurilor T din planul α cu valori în mulțimea P a punctelor din planul α.

c Fie A un punct dat în planul α. Se consideră mulțimea C_A a cercurilor din planul α care conțin punctul A şi mulțimea T a triunghiurilor din planul α. Descrieți trei funcții definite pe mulțimea C_A cu valori în mulțimea T.

Exemple: **a** $o:T\to C$, $o(t)=$ cercul circumscris triunghiului t, oricare ar fi $t\in T$.
b $h:T\to P$, $h(t)=$ ortocentrul triunghiului t, oricare ar fi $t\in T$.
c $e:C_A\to T$, unde $e(c)=$ triunghiul echilateral AXY înscris în cercul c.

Aprofundare

26 **a** Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A=\{a;b;c\}$ cu valori în mulțimea $B=\{0;1\}$.

b Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A=\{a;b\}$ cu valori în mulțimea $B=\{-1;0;1\}$.

27 Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

28 Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(2x+1)=-2x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $f(2011)$.

29 Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x^2)=2x+5$, pentru orice $x>0$. Determinați valoarea numărului $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$.

30 Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ și $g(x)=x(x-1)(x-2)+1$;

b $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(4^n)$ și $g(n)=5+(-1)^n$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

c $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(9^n)$ și $g(n)=5+4\cdot(-1)^{n+1}$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

d $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(6^n)-u(5^n)$ și $g(n)=1$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

31 Determinați numerele a, b, c, d, pentru care funcțiile f și g să fie egale, unde:

a $f:[-3;a]\to\mathbb{R}, f(x)=(3c-2)x-5$, $g:[b;11]\to\mathbb{R}, g(x)=7x+d-4$;

b $f:[2a-5;13]\to\mathbb{R}, f(x)=5x-4c-17$, $g:[3;2b+1]\to\mathbb{R}, g(x)=dx-1$;

c $f:[a-1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=bx-1$, $g:[c-3,2a+1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+d-5$.

Probleme de șapte stele

32 Demonstrați că, pentru orice funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$, este adevărată relația $a-b\mid f(a)-f(b)$.

33 Funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ are proprietățile:

a $f(0)=1$;

b $f(f(n))=f(n)+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Determinați $f(2020)$.

34 **a** Se consideră mulțimile $A=\{0;1;2;...;12\}$ și $B=\{-1;0;1\}$. Determinați numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

b Arătați că, dacă mulțimea A are n elemente, $n\geq 1$, iar mulțimea B are m elemente, $m\geq 1$, atunci numărul de funcții care se pot defini pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este egal cu m^n.

c Se consideră mulțimile finite și nevide A și B. Dacă numărul de funcții care pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este 4^5, determinați $\text{card}A$ și $\text{card}B$. Analizați variantele posibile.

35 Pentru fiecare funcție $f:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$, notăm:

$$S_f=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(12).$$

a Descrieți două funcții $o:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ pentru care $S_o=0$;

b Descrieți o funcție $m:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ pentru care S_m are valoarea maximă.

c Arătați că, dacă o funcție $f:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ are proprietatea că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot...\cdot f(12)\neq 0$, atunci $S_f\neq 0$.

I.2 Funcții definite pe mulțimi finite

Exersare

1 Determinați mulțimea valorilor funcției f (notată Im f):

a $f:\{-2,-1,0,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$;
b $f:\{0,1,4,5,11\}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+7$;
c $f:\{-1,0,3,5,8\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x+6$;
d $f:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=10x-13$;
e $f:\{1,5,4,3,6\}\to\mathbb{N},\ f(x)=\overline{x2}$;
f $f:\{4,8,12,16,20\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x:4-5$.
g $f:\{-1,2,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$.

Rezolvare: g Avem: $f(-1)=1$, $f(2)=4$ și $f(3)=5$. Rezultă $\mathrm{Im}f=\{1,4,5\}$.

2 Se consideră mulțimea $A=\{-2;-1;0;1;2\}$. Scrieți mulțimea $\mathrm{Im}f$ și reprezentați în plan G_f dacă:

a $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=x$;
b $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$;
c $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$;
d $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-|x|$;
e $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$;
f $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2$

3 Reprezentați grafic funcțiile:

a $f:\{0;1;2\}\to\{3;4;5\},\ f(x)=x+3$;
b $f:\{3;4;5\}\to\{0;1;2\},\ f(x)=x-3$;
c $f:\{1;3;5;7\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-8$;
d $f:\{-2;-1;0;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$;
e $h:\{-4;-2;0;2;4;\}\to\{0;2;4\},\ h(x)=|x|$;
f $f:\{-3;-2;0;1;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2$.

4 Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2\in\mathrm{Im}f$:

a $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2$;
b $f:\{-4-2,0,2,4,6\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x-1$;
c $f:\{-3\sqrt{2},-\sqrt{8},0,\sqrt{2}\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x\sqrt{2}$;
d $f:\left\{\dfrac{1}{2^1};\dfrac{3}{2^2};\dfrac{5}{2^3};\dfrac{7}{2^4};\dfrac{9}{2^5}\right\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=32x-11$;

5 Reprezentați grafic, în același sistem de coordonate xOy, graficele funcțiilor $f,g:\{-3;0;3\}\to\mathbb{R}$, dacă:

a $f(x)=x$ și $g(x)=x+1$;
b $f(x)=-x$ și $g(x)=-x+1$;
c $f(x)=2x$ și $g(x)=2x+2$;
d $f(x)=-2x$ și $g(x)=-2x-1$;
e $f(x)=|x|$ și $g(x)=|x|+1$;
f $f(x)=|x|-1$ și $g(x)=|x-1|$.

6 Verificați dacă următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\{-1,1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=|x|$ și $g(x)=x^2$;
b $f,g:\{-2,0,2\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3-4x$ și $g(x)=x(2-|x|)$;
c $f,g:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^{2021}-x+1$ și $g(x)=x^2-|x|+1$;
d $f,g:\{0,1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ și $g(x)=x^{2021}-x+1$;

7 Se consideră funcția $f:\{-2;0;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax$. Arătați că reprezentarea grafică a funcției f este formată din puncte coliniare dacă:

a $a=3$;
b $a=1$;
c $a=-\sqrt{2}$;
d $a=\dfrac{1}{2}$.

8 Se consideră funcțiile $f, g : \{-4; 0; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ şi $g(x) = 2x + 3$.

- **a** Reprezentați, în acelaşi sistem de coordonate, graficele funcțiilor f şi g;
- **b** Demonstrați că punctele care formează reprezentarea grafică a funcției g sunt coliniare.

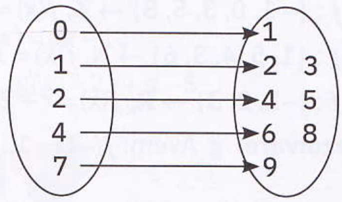
9 Reprezentați grafic funcția $f : \left\{-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right\} \to \mathbb{R}$ dacă:

a $f(x) = [x]$; **b** $f(x) = \begin{cases} -1, \text{pentru } x < 0 \\ 1, \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$; **c** $f(x) = \begin{cases} 1, \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{pentru } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

10 Se consideră funcția $f : \{-1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, \text{ dacă } x \in \{-1, 0\} \\ 2^x, \text{ dacă } x \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$.

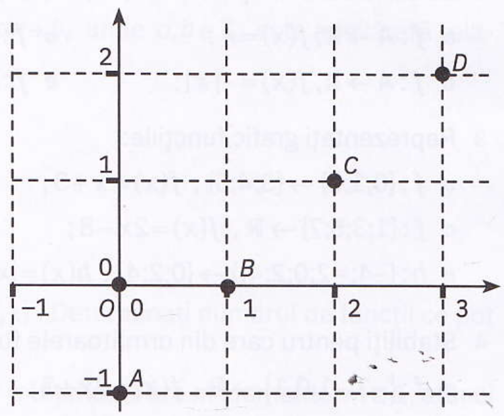
Calculați suma $S = f(-1) + 2f(0) + 3f(1) + 4f(2) + 5f(3)$.

11 Diagrama alăturată descrie o funcție $f : A \to B$.



- **a** Scrieți elementele domeniului de definiție;
- **b** Scrieți elementele codomeniului funcției;
- **c** Reprezentați aceeaşi funcție printr-un tabel;
- **d** Calculați: $f(0) + f(1) \cdot f(7) - f(2) : 2 + f(4) : 3$.

12 În figura alăturată, punctele A, B, C şi D sunt reprezentarea grafică a unei funcții numerice $f : X \to Y$.



- **a** Scrieți elementele mulțimii X.
- **b** Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$.
- **c** Descrieți aceeaşi funcție printr-un tabel.
- **d** Descrieți aceeaşi funcție printr-o formulă.

Consolidare

13 Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile $f, g : \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{R}$ sunt egale, unde:

a $f(x) = x$ şi $g(x) = x^{2n+1}$; **b** $f(x) = |x|$ şi $g(x) = x^{2n}$.

14 Determinați mulțimile A şi B şi numerele m şi n astfel încât funcțiile următoare să fie egale:

- **a** $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + m - 3$ şi $g : \{-1, 3, 7, 10\} \to \mathbb{R}, g(x) = (1 - n)x + 11$;
- **b** $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, f(x) = (3m - 5)x - 7$ şi $g : A \to B, g(x) = 10x - n$;
- **c** $f : A \to B, f(x) = 2mx - 4 + n$ şi $g : \{2, 4, 6, 8\} \to \{1, 5, 9, 13\}, g(x) = 2x - 3$.

15 Se consideră $a \in \mathbb{R}, a > 0$, şi funcțiile $f, g : \{-a; 0; a\} \to \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui a, astfel încât $f = g$, dacă:

a $f(x) = |2x|$ şi $g(x) = x^2$; **b** $f(x) = 3x$ şi $g(x) = x^3$.

16 Determinați numărul real m şi reprezentați grafic funcția $f : \{0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - m$, ştiind că punctul $A(1, 5)$ aparține graficului funcției f.

17 Determinați numărul real m şi reprezentați grafic funcția $f:\{1;3;5;7\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2mx+5$, ştiind că punctul $A(m+1,2m+13)$ aparține graficului funcției.

18 Determinați numerele reale a şi b şi apoi reprezentați grafic funcția $f:\{0;1;2;3;4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, ştiind că punctele $A(0;-3)$ şi $B(3;3)$ aparțin graficului funcției f.

19 **a** Descrieți, printr-o formulă, o funcție definită pe mulțimea $\{-1,1\}$ cu valori în mulțimea $\{1\}$.
b Descrieți, printr-o formulă, o funcție definită pe mulțimea $\{-1,0,1\}$ cu valori în mulțimea $\{0\}$.

20 **a** Dați exemplu de o funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, care să aibă proprietatea $f(x^2)=f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.
b Arătați că orice funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x^3)=f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.
c Arătați că există o singură funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(x^3)=-f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.

Aprofundare

21 Pentru fiecare din funcțiile următoare, determinați domeniul minim de valori:
a $f:\{-2;0;2;5\}\to B$, $f(x)=2x-1$;
b $f:\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}\to B$, $f(x)=3x^2-2$;
c $f:A\to B, f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+4}$, unde $A=[-2,3]\cap\mathbb{Z}$.
d $f:\{n\in\mathbb{N}\mid 3^n<100\}\to B$, $f(n)=n(n+1)$.

22 Pentru fiecare din funcțiile următoare, determinați domeniul maxim de definiție:
a $g:A\to\{-5;-2;4;7\}, g(x)=3x+1$;
b $g:A\to\{-3;-1;1;3;5;7\}, g(x)=2x-1$;
c $g:A\to\{0;1;2;3;5;11\}, g(x)=\dfrac{12-x}{x}$;
d $g:A\to\{1;2;5;10\}, g(x)=x^2+1$.

23 Se consideră funcția $f:\{-2;-1;0;1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3-x, \text{pentru } x<0\\ 3+x, \text{pentru } x\ge 0\end{cases}$.
a Descrieți corespondența $x\to f(x)$ printr-o singură formulă.
b Reprezentați grafic mulțimea G_f.
c Calculați $S=(-2)\cdot f(-2)+(-1)\cdot f(-1)+0\cdot f(0)+1\cdot f(1)+2\cdot f(2)$.

Probleme de șapte stele

24 Determinați numărul de funcții $f:\{a;b;c\}\to\{0;2;5\}$ care au proprietatea că:
a $f(a)+f(b)+f(c)=0$;
b $f(a)+f(b)+f(c)=2$;
c $f(a)+f(b)+f(c)=7$;
d $f(a)+f(b)+f(c)>5$.

25 Se consideră $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, şi funcțiile $f,g:\{-a;a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x$ şi $g(x)=mx$, unde $m\in\mathbb{R}$.
a Determinați valorile lui m astfel încât $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$;
b Fie A şi B două mulțimi nevide. Dacă funcțiile $h,j:A\to B$ au proprietatea că $\operatorname{Im} h=\operatorname{Im} j$, rezultă că $h=j$?

26 Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt egale:
a $f:\{n\in\mathbb{N}\mid 2^n<10\}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=n^4-6n^3+11n^2-6n+1$;
$g:\{n\in\mathbb{N}\mid 5n-16\le 0\}\to\mathbb{Z}$, $g(n)=n^3-3n^2+2n+1$;
b $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|\cdot(|x|-1)$,
$g:\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<2\}\to\mathbb{R}, g(x)=x^4-x^2$.